

2020数学学科知识与教学能力全真模拟试题2

第 1 题：单项选择题

有5个编号为1、2、3、4,5的红球和5个编号为1、2、3、4,5的黑球，从这10个球中取出4个，则取出的球的编号互不相同的概率为()。

- A、5/21
- B、2/7
- C、1/3
- D、8/21

【正确答案】：D

【试题解析】：

把从10个不同的球中取出4个球的组合看成基本事件，总方法数为 C_{10}^4 。取出的4个球的编号互不相同的方法数，分两步：先确定选哪4个编号，确 C_5^4 方法：再确定各编号球的颜色方法有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 种。即取出的4个球的编号互不相同的基本事件数为

因此，取出的4个球的编号互不相同的概率为 $\frac{C_5^4 \times 16}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$ 故选D，

第 2 题：单项选择题

在曲面 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ 上,过点(3,-2,4)的切平面方程是()。

- A、 $2x-y+2z=0$
- B、 $2x-y+2z=16$
- C、 $4x-3y+6z=42$
- D、 $4x-3y+6z=0$

【正确答案】：B

【试题解析】：

方法一，设球面方程为 $x^2+y^2+z^2+2px+2qr+2rz+d=0$ ，则过球面上点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方

$$x_0x+y_0y+z_0z+p(x+x_0)+q(y+y_0)+r(z+z_0)+d=0。$$

由 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ 可知,此曲面为球面,且: $p=-1, q=1, r=-2, d=-3$,又点(3,-2,4)在球面上,则切平面方程为: $2x-y+2z=16$,故选 B。

方法二:曲面 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ 为球面,标准方程为:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

球心为(1,-1,2),半径为3。在 A、B、C、D 四个选项中,只有 B、C 过点(3,-2,4)。故 A、D 排除。同时球心到切平面的距离应该等于球的半径,选项 B,球心到平面的距离为

$$d_{\text{球心}} = \frac{|2 \times 1 - (-1) + 2 \times 2 - 16|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3,$$

程为: 等于球半径,满足题意。故选 B。

第 3 题：单项选择题

下面4个矩阵中，不是正交矩阵的是()。

- A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

【正确答案】： C

【试题解析】：

A为n阶矩阵，若 $AA'=I$ 或者 $A'A=I$ (I 为单位矩阵)，则称 A 为正交矩阵。选项 C: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 结果不是单位矩阵。故选C。

第 4 题：单项选择题

设 $\{a_n\}$ 为数列，对于“存在正数 M ，对任意正整数 n ，有 $|a_n| \leq M$ ”的否定(即数列 $\{a_n\}$ 无界)是()。

- A、存在正数 M ，存在正整数 n ，使得 $|a_n| > M$
- B、对任意正数 M ，存在正整数 n ，使得 $|a_n| > M$
- C、存在正数 M ，对任意正整数 n ，有 $|a_n| > M$
- D、对任意正数 M 以及任意正整数 n ，有 $|a_n| > M$

【正确答案】： B

【试题解析】：

对任意正数 M ，存在正整数 n ，使得

$|a_n| > M$ 则称数列 $\{a_n\}$ 无界。

第 5 题：单项选择题

下列关于反证法的认识，错误的是()。

- A、反证法是一种间接证明命题的方法
- B、反证法的逻辑依据之一是排中律
- C、反证法的逻辑依据之一是矛盾律
- D、反证法就是证明一个命题的逆否命题

【正确答案】： D

【试题解析】：

反证法是假设结论的反面成立，在已知条件和“否定结论”这个新条件下，通过逻辑推理，得出与公理、定理、题设、临时假定相矛盾的结论或自相矛盾，从而断定结论的反面不能成立，并不是证明它的逆否命题成立。

第 6 题：单项选择题

下列命题不是《义务教育数学课程标准(2011年版)》中规定的“图形与几何”领域的9条“基本事实”的是()。

- A、两点之间线段最短
- B、过一点有且只有一条直线与这条直线垂直
- C、三边分别相等的两个三角形全等
- D、两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等

【正确答案】：D

【试题解析】：

《义务教育数学课程标准(2011年版)》中规定的“图形与几何”领域的9条“基本事实”之一为“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行”。其余八条分别为：(1)两点确定一条直线；(2)两点之间线段最短；(3)过一点有且只有一条直线与这条直线垂直；(4)过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；(5)两边及其夹角分别相等的两个三角形全等；(6)两角及其夹边分别相等的两三角形全等；(7)三边分别相等的两个三角形全等；(8)两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。

第 7 题：单项选择题

函数 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ 的图象与x轴交点的个数是()。

- A、0
- B、1
- C、2
- D、3

【正确答案】：B

【试题解析】：

$\because f'(x)=0+1+x+x^2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 单调递增。又 $f(0)=1, f(-2)=-\frac{5}{3}$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象与x轴有且只有一个交点。故选B。

第 8 题：单项选择题

若 $f(x)$ 为 $(-1,1)$ 内的可导奇函数，则 $f'(x)$ ()。

- A、是 $(-1, 1)$ 内的偶函数
- B、是 $(-1, 1)$ 内的奇函数

- C、是 $(-1, 1)$ 内的非奇非偶函数
D、可能是奇函数，也可能是偶函数

【正确答案】：A

【试题解析】：

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[-(x-\Delta x)] + f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f(x-\Delta x) + f(x)}{\Delta x} = \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = f'(x) \end{aligned}$$

因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 因此, $f'(x)$ 是偶函数。

第 9 题：问答题

求过点A(1, -2)的所有直线被圆 $x^2+y^2=5$ 截得线段中点的轨迹方程。

【正确答案】：

【试题解析】：

占A存网卜。根据垂径定理可知。被圆截得线段中点B与圆 $x^2+y^2=5$ 的圆心O(0, 0)连线必然垂直于直线AB,所以B点在以OA为直径的圆上 (盲角所对的弦为直径)。所以B在以 $(\frac{1}{2}, -1)$ 为圆心, 以 $\frac{1}{2}|OA| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的圆上。故B点的轨迹方程为: $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$ 。

第 10 题：问答题

$$PX = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

设P是3x3矩阵, 其秩为2, 考虑方程组

- (1) 设 ζ_1 和 ζ_2 为 $PX=0$ 的两个解, c_1, c_2 为实数, 证明 $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$ 也是 $PX=0$ 的解; (4分)
(2) 方程组 $PX=0$ 的解空间的维数是多少 (无需证明)(3分)

【正确答案】：

【试题解析】：

(1) 证明: $\because \zeta_1, \zeta_2$ 为 $PX=0$ 的两个解

$$\therefore P\zeta_1 = \mathbf{0}, P\zeta_2 = \mathbf{0}$$

$$\therefore c_1 P\zeta_1 + c_2 P\zeta_2 = \mathbf{0}$$

$$\therefore c_1 P\zeta_1 + c_2 P\zeta_2 = \mathbf{0}$$

$$\therefore P(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2) = \mathbf{0}$$

$$\therefore P(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2) = \mathbf{0}$$

即 $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$ 也是 $PX=0$ 的解。

(2) 方程组 $PX=0$ 的解空间的维数是未知量的个数 $n=3$ 减去系数矩阵P的秩2, 即为1。

第 11 题：问答题

(1)叙述函数 $f(x)$ 在区间 $a, b]$ 中上凸的定义, 并证明 $f(x)=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 中上凸; (4分)

(2)若 A, B, C 为某三角形的三内角。证明 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。(3分)

【正确答案】:

【试题解析】:

(1) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的二阶导数 $f''(x) \leq 0$, 就说 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中上凸。

证明: $f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x$. $f''(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 中小于等于0, 故 $f(x)=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 中上凸。
 $\therefore A+B+C=\pi$

又 $\because y=\sin x (0 < x < \pi)$ 是凸函数

根据 Jensen 不等式:

$$\therefore \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)证明: A, B, C 为三角形三内角 即 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

第 12 题: 问答题

《义务教育数学课程标I佳(2011年版)》中“数据分析观念”的含义是什么

【正确答案】:

【试题解析】:

在新课程标准中, 将数据分析观念解释为: 了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究, 收集数据, 通过分析作出判断, 体会数据中蕴涵着信息; 了解对于同样的数据可以有多种分析的方法, 需要根据问题的背景选择合适的方法; 通过数据分析体验随机性, 一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同, 另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律。数据分析是统计的核心。

第 13 题: 问答题

数学教学中如何贯彻严谨性与量力性相结合的原则

【正确答案】:

【试题解析】:

(1)认真了解学生的心理特点与接受能力, 是贯彻严谨性和量力性相结合的原则的前提。

“备课先备学生”的经验之谈, 就出于此。也就是说, 只有全面地了解学生情况, 才能使制订的教学计划与内容安排真正做到有的放矢、因材施教, 才能真正贯彻好这一原则。

(2)在教学中, 应设法安排使学生逐步适应的过程与机会, 逐步提高其严谨程度, 做到立论有据。例如初学平面几何的学生, 对严格论证很不适应, 教学时应先由教师给出证明步骤, 让学生只填每一步的理由, 鼓励学生发扬“跳一跳够得到, , 的精神, 合情合理地提出教学要求, 逐步过渡到学生自己给出严格证明, 最后要求达到立论有据。论证简明。但绝不能消极适应学生, 人为地降低教材理论要求, 必须在符合内容科学性的前提下, 结合学生实际组织教学。

(3)在数学教学中, 注意从准确的数学基础知识和语言出发培养严谨性。这就要求教师备好

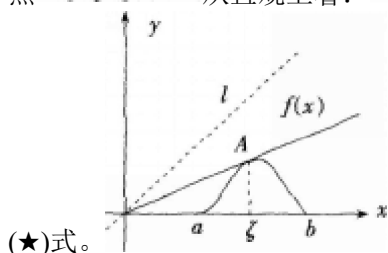
教材，达到熟练准确。不出毛病。另外要严防忽公式、法则、定理成立的条件，还要注意逐步养成学生的语言精确习惯。这就要求教师有较高的教学语言素养，使自己的语言精确、简练、规范，对教学术语要求准确、得当。

(4)在数学教学中，注意培养全面周密的思维习惯，逐步提高严谨程度。一般数学中所研究的是一类事物所具有的性质或它们元素之间的关系，而不仅仅是个别事物。于是要求教师思考问题全面周密。

总之，数学的严谨性与量力性要很好地结合，在教学中要注意教学的“分寸”，即注意教材的深广度，从严谨着眼，从量力着手；另外，要注意阶段性，使前者为后者作准备，后者为前者的发展，前后呼应。通过对学生严谨性的培养使学生养成良好的思考习惯。

第 14 题：问答题

如下图所示，设 $f(a)=f(b)$ 。设 l 为绕原点 O 可转动的细棍(射线)，放手后落在函数 $f(x)$ 的图象上并支撑在点 $A(\xi, f(\xi))$ 上，从直观上看， $f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。 (*) 证明函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 ξ 处取得最大值，并由此证明



【正确答案】：

【试题解析】：

证明：函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续， (a, b) 可微， $b > a > 0$ ，则 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, b]$ 连续， (a, b) 可微。 $F'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ ，令 $F'(x) = 0$ ，则 $F(x)$ 在 (a, b) 存在极值点满足 $f'(x)x - f(x) = 0$ ，即为 $x = \xi \in (a, b)$ 是函数 $F(x)$ 的极值点，且 $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

又在 (a, b) 内， $f(a) = f(b) = 0$ ，且 $f(x) > 0$ ，则 $F(a) = F(b) = 0$ ，且 $F(\xi) > F(a) = F(b)$ ，所以函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 ξ 处取得最大值。

第 15 题：问答题

对学生数学学习的评价，既要关注学习结果，也要关注学习过程，你认为对学生数学学习过程的评价应关注哪些方面 试举例说明。

【正确答案】：

【试题解析】：

数学学习评价，既要关注学生数学知识与技能的理解和掌握，也要关注学生学习数学的情感与态度；既要关注学生数学学习的结果，更要关注他们在学习数学过程中的变化和发展；另外评价是与教学过程并行的同等重要的过程，评价提供的是学生强有力的信息，教师要及时给予学生指导和反馈，促进学生改进。评价还应体现以人为本的思想，构建个体的发展。具体地说，对学生数学学习过程评价应关注以下几个方面：

(1)评价学生在学习过程中表现出来的对数学的认识、数学思想的感受、数学学习态度、动

机和兴趣等方面的变化。评价学生在学习过程中的自信心、勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等意志品质方面的变化。注重学生数学学习的积极情感和良好学习品质的形成过程。

(2)评价学生能否理解并有条理地表达数学内容，是否积极主动地参与数学学习活动，是否愿意和能够与同伴交流、与他人合作探究数学问题。注重学生参与数学学习，和同伴交流、合作的过程。

(3)评价学生在学习过程中是否肯于思考、善于思考，能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法。注重学生思考方法和思维习惯的养成过程。

(4)评价学生从实际情境中抽象出来的数学知识以及应用数学知识解决问题的意识和能力。

(举例。)

第 16 题：教学案例题

案例：阅读下列3个教师有关“代数式概念”的教学片段。

教师甲的情境创设：

“一隧道长 Z 米，一列火车长180米，如果该列火车穿过隧道所花的时间为 t 分钟。则列车的速度怎么表

示”学生计算得出 $\frac{l+180}{t}$ ，教师指出：“ $\frac{l+180}{t}$ ”、“ $10a+2b$ ”这类表达式称为代数式。

教师乙的教学过程：

复习上节内容后，教师在黑板上写下代数式的定义：“由运算符号、括号把数和字母连接而成的表达式称为代数式”，特别指出“单独一个数或字母也称为代数式”；然后判断哪些是代数式，哪些不是；接着通过“由文字题列代数式”及“说出代数式所表示的意义”进一步解释代数式的概念：最后让学生练习与例题类似的题目。

教师丙的教学过程：

让学生自学教材，但是教材并没有说“代数式”是怎么来的，有什么作用。接着教师大胆地提出开放式问题：“我们怎样用字母表示一个奇数”当时教室里静极了，学生们都在思考。

先有一位男生举手回答：“ $2a-1$ ”。

“不对，若 $a=1.5$ 呢”一位男生说。

沉默之后又有一位学生大声地说：“77,应该取整数!”

有些学生不大相信：“奇数77能用这个式子表示吗”

不久，许多学生算出来：“ a 取39”。

此时，教师趁势作了一个简单的点拨：“只要。取整数， $2a-1$ 一定是奇数，对吗 那么偶数呢”他并没有作更多的解说，点到为止，最后的课堂小结也很简单：“数和式有什么不同”“式中的字母有约束吗”

“前面一节学过的式子很多都是代数式!……”从师生们自如的沟通来看，他们都已成竹在胸。

问题：

(1)你认可教师甲的情境创设吗 说明理由。(6分)

(2)你认可教师乙的教学过程吗 说明理由。(7分)

(3)你认可教师丙的教学过程吗 说明理由。(7分)

【正确答案】：

【试题解析】：

(1)甲教师情境创设的优点在于运用学生熟悉的物理背景来进行情境导入，降低了认知的难度。

缺点在于看似联系实际，其实脱离学生的现有认知水平，使学生的认知起点与数学逻辑起点失调，无法引起学生的思维共鸣，使问题情境中隐含的数学问题与数学方法不能与教学目标相衔接，不能形成学生原有认知水平及生活经验的正迁移。

(2)乙教师的教学过程存在优点也存在缺陷。优点是一开始复习了上节内容，进行了新旧知识间的过渡，降低了学生对新知识的认知难度；采取了直接导入的方法，开门见山的介绍本节课题，引起学生的注意，使学生迅速进入学习状态，对本节内容的基本轮廓有了大致了解；整个教学过程条理清楚、重难点突出；最后进行巩固练习，加深了学生对新知识的识记和掌握。

缺点在于没有进行合适的情境创设，将知识全盘塞给学生，剥夺了学生研究问题的权利，

无法激发学生学习新知识的兴趣，学生只能机械地配合老师的教学，整个过程中，缺乏师生间的互动，忽了学生的主体地位。

(3)丙教师的教学过程存在优点也存在缺陷。优点是充分发挥了学生的主体地位，开放性问题激发了学生自主探究的兴趣，有利于培养他们的独立思考能力和创新意识。

缺点在于首先教师没有给出学生自主探究的准备时间，没有提供丰富的自学素材；另外教师导入的开放式

问题并不能充分突出代数式这节的核心“数”与“式”的区别；在探究过程中，教师没有科学合理地发挥自己的主导作用，小结也显得过于潦草和模糊。

第 17 题：教学案例题

请以“变量(第一课时)”为课题，完成下列教学设计。

(1)教学目标。(5分)

(2)教学重点、难点。(4分)

(3)教学过程(只要求写出新课导入和新知探究、巩固、应用等)及设计意图。(21分)

【正确答案】：

【试题解析】：

一、教学分析

1. 教学目标

(1)知识目标

①通过丰富的实例，使学生在具体环境中领悟学习函数的意义。

②了解常量与变量的含义。能分清实例中的常量与变量。

(2)能力目标

通过实际问题的解决，引导学生经历从具体到抽象认识函数的过程，发展符号感。

(3)情感目标

引导学生探索实际问题中的数量关系。增强数学建模意识，培养对学习数学的兴趣和积极参与数学活动的热情。

2. 教学难点、重点

重点是对变量与常量的概念的理解；难点是实际问题中函数关系式的建立和对变量的准确判断。

二、教学过程设计

1. 创设情境

教学内容：“万物皆变”，一个量随另一个量的变化而变化的现象。

师生互动：教师依次展示几个函数问题的实例：学生通过直观的观察相关图片，了解函数的研究内容。

(设计意图：函数研究的是一个量随另一个量的变化而变化的现象，学生对此认识、理解有一定难度，仅是举例比较抽象，展示与之相关的图片能较好使学生接受函数。)

2. 提出问题

教学内容：问题：用20 m长的绳子围成长方形，试改变长方形的长 x ，观察长方形的面积 S 怎样变化，试举出6组长、宽的值，计算相应长方形的面积的值，然后探索它们的变化规律。

①能用含 x 的式子表示 S 吗 ②当 x 取定一个值时，面积 s 能随之确定吗 是否是唯一的 ③这个变化过程中， x 能任意取值吗

师生互动：教师展示问题，学生思考回答。

(设计意图：来自学生身边的事例，尤其是常量与变量在这个情境中能较好地让学生直观感知。变量与常量是本节课重点。在教学过程中引导学生去发现变化的量与没变化的量。在明确的活动目标指引下，组织学生经历数学思考的过程，进行有效的数学活动。通过教师动画演示和学生探究，使学生更好地认知变化规律。)

3. 例题应用

教学内容：教师举出例题。

t (小时)	s (千米)
1	40
2	80
3	120
4	160
5	200

①一辆汽车匀速行驶的数据如下表：

写出行驶路程 s (千米)与行驶时间 t (小时)的关系式。

②一辆汽车以 v 千米/时的速度匀速行驶，写出行驶路程 s (千米)与行驶时间 t (小时)的关系式。

③一辆汽车行驶50千米的路程，写出行驶速度 v 千米/时与行驶时间 t (小时)之间的关系式。

师生互动：教师展示问题，学生解答。

(设计意图：变式训练，使学生深刻理解变量、常量是在一个变化过程中相对地存在，常量既可以用一个具体的数字表示，也可以用一个表示常数的字母表示。以不同形式(表格、解析式、图象)呈现变量间的单值对应问题，为后面的函数表示法埋下伏笔。)

4. 归纳小结

教学内容：(1)函数研究内容：一个量随另一个量的变化而变化，变量，常量：

从现实问题出发，寻求事物变化中变量之间变化规律的一般方法及步骤：①确定事物变化中的变量与常量。

②尝试运算寻求变量间存在的规律。③利用学过的有关知识确定关系式。

(2)对自己说，你有什么收获 对同学说，你有什么温馨提示 对老师说，你有什么疑惑

师生互动：师生互动、生生互动，总结本节知识点以及形成的能力。教师归纳展示本节课知识。

(设计意图：通过学生自己、同学问、师生间的互动较全面地归纳本节课的收获。使不同程度的学生都能得到不同程度的训练和提高。)